NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY ROVNIC

Tvrzení Soustava $Ax = b$ s invertibilní maticí A má jediné řešení $x = A^{-1}b$.

Důkaz $x = A^{-1}b$ je řešení.

Pro každé řešení x' platí $Ax' = b \Rightarrow$

$A^{-1} \cdot A \cdot x' = x' = A^{-1} \cdot b$.

Tvrzení (Cramerovo pravidlo)

Buď $Ax = b$ soustava s invertibilní maticí A a řešením $x = (x^1, \dots, x^n)$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$

$$x^i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

kde A_i je matice vzniklá z matice A záměnou i-tého sloupce za sloupec pravých stran b.

POLYNOMY

Buď P pole, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in P$, $x \notin P$.

POLYNOM jedné neurčité x nad polem P je výraz tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 .$$

Mn. všech polynomů neurč. x nad polem P značíme $P[x]$.

$\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$

Prvek $a_i \in P$ je i-tý koeficient. a_0 se nazývá ABSOLUTNÍ ČLEN. Polynom, jehož koeficienty a_i jsou nulové, se nazývá NULOVÝ POLYNOM a označuje se 0.

STUPEŇ polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ je největší číslo r takové, že $a_r \neq 0$. Značí se $\deg f$.

Koeficient a_r se nazývá VEDOUCÍ KOEFICIENT, $a_r = \operatorname{lc} f$.

Když $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ a $\xi \in P$, položíme $f(\xi) = a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + a_1 \xi + a_0 \in P$.

Prvek $\xi \in P$ se nazývá KOŘEN polynomu $f \in P[x]$, jestliže $f(\xi) = 0$.

Buďte $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $g = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0 \in R[x]$.

Položme $p = \max\{m, n\}$ a pro $k \in \{0, \dots, p\}$ nechť

$$c_k = a_k + b_k .$$

SOUČET polynomů f a g je polynom

$$f + g = c_p x^p + \dots + c_1 x + c_0 .$$

Polynom OPAČNÝ k f je polynom $-f = -a_n x^n - \dots - a_1 x - a_0$.

Položme $p = m + n$ a pro $k \in \{0, \dots, p\}$ nechť

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 = \sum_{i+j=k} a_i b_j .$$

SOUČIN polynomů f a g je polynom

$$f \cdot g = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \dots + c_1 x + c_0 .$$

Tvrzení Pro libovolné polynomy $f, g \in P[x]$ a lib. prvek $\xi \in P$ platí

$$(f+g)(\xi) = f(\xi) + g(\xi), \quad (-f)(\xi) = -f(\xi),$$

$$(fg)(\xi) = f(\xi) \cdot g(\xi).$$

Tvrzení Buďte $f, g, h \in P[x]$. Potom

1) $f+g = g+f$
2) $f+(g+h) = (f+g)+h$
3) $f+0 = f$
4) $f+(-f) = 0$
5) $f \cdot g = g \cdot f$
6) $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$
7) $f \cdot 1 = f$
8) $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$.

Tvrzení Součin nenulových polynomů f, g je nenulový polynom a platí

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g$$

$$\operatorname{lc}(fg) = \operatorname{lc} f \cdot \operatorname{lc} g.$$

Důkaz $\operatorname{lc} f = a_m \neq 0$, $\operatorname{lc} g = b_n \neq 0 \Rightarrow$

$\deg f = m$, $\deg g = n$.

Pro $k > m+n$ máme $c_k = 0 \Rightarrow \deg(fg) \leq m+n$.

$c_{m+n} = a_m b_n \neq 0 \Rightarrow fg \neq 0$, $\operatorname{lc}(fg) = c_{m+n} =$

$= \operatorname{lc} f \cdot \operatorname{lc} g$ a $\deg(fg) = m+n = \deg f + \deg g$.

Tvrzení Jestliže jeden z polynomů f, g je nulový, potom jejich součin je nulový polynom.

Tvrzení Invertibilní prvky $P[x]$ jsou právě nenulové konstantní polynomy.

Tvrzení Nechť $f, g, h \in P[x]$, $fg = fh$, $f \neq 0$. Pak $g = h$.

Důkaz Jestliže $fg = fh$, pak $f(g-h) = 0$.

$\Rightarrow$ f nebo $g-h$ je nulový. $\Rightarrow$ $g-h$ je nulový, $g-h=0$

$\Rightarrow g = h$.

Říkáme, že polynom $g \in P[x]$ DĚLÍ polynom $f \in P[x]$, jestliže existuje polynom $h \in P[x]$ takový, že $f = g h$. Zapisujeme $g \mid f$. Říkáme také, že g je DĚLITEL polynomu f.

Polynom $f \in P[x]$ se nazývá NORMOVANÝ, je-li $f \neq 0$ a $lc\, f = 1$. Je-li $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $lc\, f = a_n \neq 0$, pak je podíl

$$\bar{f} = \frac{f}{lc\, f} = \frac{1}{lc\, f} f = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}$$

je normovaný polynom.

<u>Tvrzení</u> Buďte $f, g \in P[x]$ normované polynomy. Následující podmínky jsou ekvivalentní

1) $f \mid g$ a $g \mid f$
2) $f = g$.

<u>Důkaz</u> Nechť platí 1). Pak existují $p, q \in P[x]$ tak, že

$f = g \cdot p$, $g = f \cdot q$. $\Rightarrow$ $f = f \cdot q \cdot p$ a $qp = 1$.

$\Rightarrow p, q$ jsou nenulové konstantní polynomy a

$1 = lc\, f = lc(gp) = lc\, g \cdot lc\, p = 1 \cdot lc\, p = lc\, p = p \Rightarrow$

$\Rightarrow f = gp = g$.